



CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE-FILIÈRE MP

## MATHÉMATIQUES 2

DURÉE : 4 heures

*Les calculatrices programmables et alphanumériques sont autorisées, sous réserve des conditions définies dans la circulaire n°86-228 du 28 juillet 1986.*

## Introduction

Dans tout ce problème,  $E$  désigne un espace vectoriel euclidien de dimension finie  $n > 0$ . On notera  $(u|v)$  le produit scalaire des deux vecteurs  $u$  et  $v$ , et  $\|u\|$  la norme issue de ce produit scalaire.  $O(E)$  est le groupe orthogonal de  $E$ , ses éléments sont les isométries de  $E$ . Si  $H$  est un hyperplan de  $E$ , c'est-à-dire un sous-espace vectoriel de dimension  $n - 1$ , on appelle **réflexion** d'hyperplan  $H$  la symétrie orthogonale par rapport à  $H$ . Elle est entièrement déterminée par  $H$ .

Si  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ , l'**orthogonal** de  $F$  est le sous-espace vectoriel noté  $F^\perp$  de  $E$  défini par :

$$F^\perp = \{y \in E \mid \forall x \in F, (x|y) = 0\}$$

Il a pour dimension  $n - \dim F$ .

Si  $f_1, f_2, \dots, f_p$  sont des isométries, on note  $\text{gr} \langle f_1, f_2, \dots, f_p \rangle$  le plus petit sous-groupe du groupe orthogonal qui contient  $f_1, f_2, \dots, f_p$ . On dit que c'est le groupe engendré par  $f_1, f_2, \dots, f_p$ .

Le but de ce problème est une étude des groupes d'isométries qui sont **finis** et qui sont engendrés par des réflexions. Ces groupes sont appelés **groupes de Coxeter**.

## 1. Généralités - Le cas commutatif

1. Montrer qu'une réflexion d'hyperplan  $H$  est diagonalisable. Décrire les sous-espaces propres.
2. Soit  $u$  un vecteur non nul orthogonal à  $H$ . Démontrer que la réflexion  $s$  d'hyperplan  $H$  est définie par :

$$\forall x \in E, s(x) = x - 2 \frac{(x|u)}{(u|u)} u$$

3. Soit  $g$  une isométrie quelconque et  $s$  une réflexion d'hyperplan  $H$ , démontrer que  $g \circ s \circ g^{-1}$  est une réflexion. Quel est son hyperplan ?
4. On dit que deux hyperplans sont **perpendiculaires** si l'un contient l'orthogonal de l'autre. Ils sont donc distincts. Soient  $k$  hyperplans  $H_1, H_2, \dots, H_k$  deux à deux perpendiculaires et  $u_1, u_2, \dots, u_k$  des vecteurs non nuls tels que, pour tout  $i$ ,  $u_i$  est orthogonal à  $H_i$ . Montrer que les vecteurs  $u_1, u_2, \dots, u_k$  sont orthogonaux. En déduire que  $k \leq n$ .
5. Démontrer que deux réflexions commutent si et seulement si elles sont identiques ou si l'hyperplan de l'une est perpendiculaire à l'hyperplan de l'autre.

Tournez la page S.V.P.

6. En déduire tous les groupes de Coxeter commutatifs lorsque  $n = 3$ . On montrera qu'ils sont engendrés par une, deux ou trois réflexions, et on décrira chacun des groupes obtenus (par exemple à l'aide de matrices).

## 2. Le cas de la dimension 2

On suppose dans cette partie que  $n = 2$ , et que  $E$  est muni d'une structure d'espace vectoriel euclidien orienté. Les hyperplans sont alors les droites vectorielles  $D$  : dans ce cas, on parlera d'une réflexion d'axe  $D$ .

Soit  $G$  un groupe de Coxeter engendré par deux réflexions  $s_1$  et  $s_2$  d'axes respectifs  $D_1$  et  $D_2$  distincts; on choisit deux vecteurs unitaires  $d_1$  sur  $D_1$  et  $d_2$  sur  $D_2$ . Soit alors  $(e_1, e_2)$  la base orthonormée directe de premier vecteur  $e_1 = d_1$ ; on appelle  $\theta$  le réel de  $]0, 2\pi[$  tel que

$$d_2 = (\cos \theta)e_1 + (\sin \theta)e_2$$

1. Donner les matrices de  $s_1$  et de  $s_2$  dans cette base.
2. Démontrer que  $s_2 \circ s_1$  est la rotation  $\rho$  d'angle de mesure  $2\theta$ .
3. Démontrer que le groupe engendré par une rotation d'angle de mesure  $2\theta$  est fini si, et seulement si, il existe  $p, m$  entiers premiers entre eux tels que  $\theta = \frac{p\pi}{m}$ .
4. On suppose maintenant que  $\theta = \frac{p\pi}{m}$  où les entiers  $p$  et  $m$  sont premiers entre eux. Démontrer que

$$s_2 = \rho \circ s_1, \quad s_1 \circ \rho^k \circ s_1 = \rho^{m-k} \quad \text{pour } k \in \{0, 1, \dots, m-1\}$$

5. En déduire que  $G$  coïncide avec l'ensemble

$$G' = \{e, \rho, \rho^2, \dots, \rho^{m-1}, s_1, \rho \circ s_1, \rho^2 \circ s_1, \dots, \rho^{m-1} \circ s_1\}$$

On vérifiera en particulier que les éléments de  $G'$  sont bien distincts et que  $G'$  est un groupe.

6. Démontrer que  $G$  contient  $m$  réflexions. Préciser les axes de ces réflexions lorsque  $m = 6$ .

## 3. Les familles obtusangles et acutangles

Soit  $(r_1, r_2, \dots, r_p)$  une suite de vecteurs non nuls. On dit que c'est une famille obtusangle si  $(r_i | r_j) \leq 0$  pour tout couple  $(i, j)$  où  $i \neq j$ .

1. On suppose qu'il existe une famille  $(r_1, r_2, \dots, r_p)$  qui est obtusangle et qui est formée de vecteurs qui sont tous dans un même demi-espace strict: c'est-à-dire qu'il existe un vecteur  $t$  non nul tel que :

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, p\}, \quad (t | r_i) > 0$$

On veut démontrer que cette famille est une famille libre. On raisonnera par l'absurde, en supposant que, quitte à réordonner la suite  $(r_1, r_2, \dots, r_p)$ , il existe une relation de liaison de la forme :

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i r_i = \sum_{i=k+1}^p \mu_i r_i$$

où les  $(\lambda_i)$  et les  $(\mu_i)$  sont positifs, un au moins étant non nul. Soit  $v$  le vecteur défini par cette égalité.

- (a) Calculer  $(v|v)$  et en déduire que  $v = 0$ .
- (b) Exprimer le produit scalaire  $(v|t)$  et en déduire une contradiction.
2. À une base  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ , on associe la matrice  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  dont les coefficients  $m_{i,j}$  sont donnés par :

$$m_{i,j} = (e_i|e_j)$$

- (a) Montrer que la matrice  $M$  est symétrique. Exprimer  ${}^tXMX$  où  $X$  désigne la matrice

colonne  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ . En déduire que  $M$  est définie positive.

- (b) On suppose à partir de maintenant que les vecteurs  $(e_1, \dots, e_n)$  sont unitaires. Démontrer que les valeurs propres de  $M$  sont dans l'intervalle  $]0, n[$ .
3. (a) À la base  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ , démontrer qu'on peut associer une base et une seule  $(f_1, f_2, \dots, f_n)$  telle que :

$$(e_i|f_j) = 0 \text{ si } i \neq j \text{ et } (e_i|f_i) = 1$$

pour tout  $(i, j)$ . Cette base s'appelle **base duale** de  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ .

- (b) Vérifier que l'on a alors :

$$f_i = \sum_{j=1}^n (f_i|f_j) e_j$$

- (c) Démontrer que si  $N$  est la matrice associée à la base duale, c'est-à-dire la matrice dont les coefficients sont donnés par :  $n_{i,j} = (f_i|f_j)$ , alors  $N = M^{-1}$ . On pourra calculer le produit  $NM$ .

4. On suppose de plus que la base  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  est obtusangle. On veut démontrer que la base  $(f_1, f_2, \dots, f_n)$  est acutangle (c'est-à-dire que  $(f_i|f_j) \geq 0$  pour tout  $(i, j)$ ). Soit  $A$  la matrice définie par :

$$A = I - \frac{1}{n}M$$

où  $I$  est la matrice de l'identité.

- (a) Démontrer que  $A$  est diagonalisable et que ses valeurs propres sont dans l'intervalle  $]0, 1[$ .
- (b) En utilisant une série de matrices, démontrer que  $(I - A)^{-1}$  est une matrice dont tous les coefficients sont positifs.
- (c) Montrer que  $M^{-1}$  a tous ses coefficients positifs et conclure.

Tournez la page S.V.P.

#### 4. Les systèmes de racines

Soit  $G$  un groupe de Coxeter. On note  $\Delta$  l'ensemble des vecteurs unitaires  $u$  de  $E$  tels qu'il existe une réflexion de  $G$  d'hyperplan  $H$ , avec  $u \perp H$ . Ainsi, si  $u$  est dans  $\Delta$ , c'est également le cas de  $-u$ .  $\Delta$  est appelé **système de racines** de  $G$ . Il est fini puisque  $G$  est par hypothèse fini.

1. Préciser l'ensemble  $\Delta$  dans le cas du groupe  $G$  de la question 2.5, pour le cas  $m = 6$ .
2. Démontrer que  $\Delta$  est stable par  $G$ , c'est-à-dire que

$$\forall u \in \Delta, \forall g \in G, g(u) \in \Delta$$

3. On admettra qu'un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension strictement positive n'est pas réunion finie d'hyperplans. En déduire qu'il existe un vecteur  $t$  qui n'est orthogonal à aucun élément de  $\Delta$ . On choisit alors un tel vecteur et on pose :

$$\Delta^+ = \{r \in \Delta \mid (t|r) > 0\}, \Delta^- = \{r \in \Delta \mid (t|r) < 0\}$$

4. Si  $B = \{r_1, r_2, \dots, r_p\}$  est un ensemble de vecteurs de  $\Delta^+$ , un vecteur  $x$  de  $E$  est  **$B$ -positif** s'il existe des réels  $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p\}$  tous positifs ou nuls, tels que  $x = \sum_{i=1}^p \lambda_i r_i$ . Un vecteur est alors  **$B$ -négatif** si son opposé est  $B$ -positif.

On appelle **système fondamental** de  $\Delta$  un sous-ensemble  $B = \{r_1, r_2, \dots, r_p\}$  de  $\Delta^+$ , tel que tout élément de  $\Delta^+$  soit  $B$ -positif, et qui est de cardinal minimal. Montrer qu'il en existe au moins un. On choisit désormais un système fondamental  $B = \{r_1, r_2, \dots, r_p\}$ . Les vecteurs de  $\Delta^+$  sont donc tous  $B$ -positifs, ceux de  $\Delta^-$  tous  $B$ -négatifs.

5. Soit  $i$  et  $j$  distincts de  $\{1, 2, \dots, p\}$ . Montrer que si  $\lambda_i > 0, \lambda_j > 0$ , alors  $x = \lambda_i r_i - \lambda_j r_j$  n'est ni  $B$ -positif, ni  $B$ -négatif.
6. Si  $s_i$  est la réflexion d'hyperplan orthogonal à  $r_i$ , et si  $i \neq j$ , montrer que  $s_i(r_j) \in \Delta^+$  et que  $(r_i|r_j) \leq 0$ . On pourra utiliser la question précédente ainsi que la question 1.2. En déduire que le système fondamental  $B = \{r_1, r_2, \dots, r_p\}$  est obtusangle et qu'il forme un système libre.
7. En déduire que si  $r \in \Delta$  peut s'écrire  $r = \sum_{i=1}^p \mu_i r_i$  où un des  $\mu_i$  est strictement positif, alors tous les  $\mu_i$  sont positifs et  $r \in \Delta^+$ .

Soient  $(s_1, s_2, \dots, s_p)$  les réflexions d'hyperplans orthogonaux respectivement à  $(r_1, r_2, \dots, r_p)$  et  $G_0 = \langle s_1, s_2, \dots, s_p \rangle$ . On veut démontrer que  $G = G_0$ .

8. Démontrer que si  $r \in \Delta^+$  alors  $s_i(r) \in \Delta^+$  sauf si  $r = r_i$ .
9. Soit  $r$  un vecteur de  $\Delta^+ \setminus B$  (c'est-à-dire un vecteur  $r$  de  $\Delta^+$  qui n'est pas dans  $B$ ).
  - (a) Démontrer qu'il existe un élément  $r_i$  de  $B$  tel que  $(r|r_i) > 0$
  - (b) On associe à  $r$  l'élément  $s_i(r)$  où  $s_i$  est la réflexion associée à  $r_i$ , et on pose  $u_0 = r, u_1 = s_i(r)$ . Montrer que la répétition de ce procédé conduit en un nombre fini  $k$  d'opérations à un élément de  $B$ , les éléments intermédiaires  $u_j (j = 0, \dots, k-1)$  étant dans  $\Delta^+ \setminus B$ , et tels que la suite finie  $(u_j|t)$  soit strictement décroissante.
  - (c) En déduire qu'il existe  $g \in G_0$  tel que  $g(r) \in B$

10. Démontrer que  $G = G_0$  et donc que, pour tout groupe de Coxeter, il existe une famille obtusangle  $(r_1, r_2, \dots, r_p)$  de vecteurs unitaires, contenue dans un même demi-espace strict, et telle que  $G$  est engendré par les réflexions  $(s_1, s_2, \dots, s_p)$  où  $s_i$  est la réflexion d'hyperplan orthogonal à  $r_i$ . Décrire une telle famille dans le cas de la dimension deux et pour la valeur  $m = 6$  de la question 2.6.

## 5. Le cas de la dimension trois

Dans toute cette partie, on suppose que la dimension de  $E$  est trois.

1. Décrire les groupes de Coxeter engendrés par une ou deux réflexions.
2. On se donne une famille obtusangle  $(r_1, r_2, r_3)$  de vecteurs unitaires. On note  $\alpha, \beta, \gamma$  les nombres de  $[\frac{\pi}{2}, \pi[$  tels que

$$(r_1|r_2) = \cos(\alpha), (r_2|r_3) = \cos(\beta), (r_3|r_1) = \cos(\gamma)$$

Démontrer que  $\alpha + \beta + \gamma < 2\pi$ . On pourra utiliser une projection sur le plan engendré par deux des vecteurs.

3. On suppose que  $G$  est un groupe de Coxeter dont le système fondamental est  $r_1, r_2, r_3$ . Démontrer qu'il existe des entiers  $a, b$  et  $c$  entiers supérieurs ou égaux à 2 tels que :

$$(r_1|r_2) = -\cos\left(\frac{\pi}{a}\right), (r_2|r_3) = -\cos\left(\frac{\pi}{b}\right), (r_3|r_1) = -\cos\left(\frac{\pi}{c}\right)$$

puis montrer que l'on a nécessairement :

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} > 1$$

4. En déduire que les trois entiers  $(a, b, c)$  ne peuvent prendre, à l'ordre près, que les séries de valeurs :

$(2, 2, c)$  où  $c$  est un entier supérieur ou égal à deux.

$(2, 3, 3)$

$(2, 3, 4)$

$(2, 3, 5)$

5. À l'aide d'une base orthonormée  $(e_1, e_2, e_3)$  trouver une configuration de trois vecteurs correspondant à la première série, puis une correspondant à la seconde série.

On peut vérifier qu'il existe des configurations correspondant aux deux autres séries, ce qui résout le problème de la classification des groupes de Coxeter en dimension trois.

**Fin de l'énoncé**

## 1 Généralités

1.  $E = H + H^\perp$ ,  $H$  est l'espace propre pour 1,  $H^\perp$  l'espace propre pour  $-1$ .
2. Si  $p$  est le projecteur orthogonal sur  $\mathbb{R}u$ ,  $p(x) = \frac{(x|u)}{(u|u)}u$ , de là la formule attendue, car  $s(x) = x - 2p(x)$ .
3. Le cours apprend ce que deviennent les sous-espaces propres d'un endomorphisme diagonalisable par conjugaison:  $g \circ s \circ g^{-1}$  est diagonalisable, avec pour espaces propres  $g(H)$  pour la valeur propre 1 et  $g(H^\perp) = (g(H))^\perp$  pour la valeur propre  $-1$ , de sorte qu'on trouve la réflexion d'hyperplan  $g(H)$ .
4. *Il faut comprendre: la famille  $(u_1, \dots, u_k)$  est orthogonale...*  
Soient  $i \neq j$ ; alors  $u_j \in H_j^\perp \subset H_i$ , donc  $(u_i|u_j) = 0$ .  
Une famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre, donc  $k \leq n$ .
5. Si  $st = ts$ , alors  $sts^{-1} = t$ , donc si  $t$  est la réflexion d'hyperplan  $H$ , c'est aussi celle d'hyperplan  $s(H)$ , donc  $s(H) = H$ , puis  $s(H)^\perp = H^\perp$ ; on choisit  $u$  tel que  $H^\perp = \mathbb{R}u$ , on obtient ainsi  $s(\mathbb{R}u) = \mathbb{R}u$ ; donc  $u$  est propre pour  $s$ ; si  $s(u) = -u$ , alors  $s = t$ ; si  $s(u) = u$ ,  $u$  est dans l'hyperplan de  $s$ , qui est ainsi perpendiculaire à celui de  $t$ . Réciproquement, si l'hyperplan de  $s$  est perpendiculaire à celui de  $t$ ,  $s(u) = u$ , puis  $s(H) = H$  et  $st = ts$ .
6. Si  $k$  réflexions distinctes sont dans ce groupe, leurs hyperplans sont deux à deux perpendiculaires d'après 5., donc  $k \leq 3$  d'après 4. Le groupe de Coxeter est donc engendré par une, deux ou trois réflexions (le cas de zéro semble exclu).

Si  $s$  est une réflexion,  $\langle s \rangle = \{Id, s\}$ .

Si  $G = \langle s, t \rangle$ , les plans sont perpendiculaires, on peut choisir une

base orthonormée telle que les matrices soient resp.  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  et

$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ . Outre l'identité, le groupe contient le demi-tour de

matrice  $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ , il est isomorphe à  $\{-1, 1\}^2$ .

Si  $G = \langle s, t, v \rangle$ , les plans sont perpendiculaires, on peut choisir une

base orthonormée telle que les matrices soient resp.  $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \text{ Le groupe est isomorphe à } \{-1, 1\}^3.$$

## 2 Dimension deux

1. On a  $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $M_2 = \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{pmatrix}$ .
2. La matrice de cette composée est  $\begin{pmatrix} \cos(2\theta) & -\sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & \cos(2\theta) \end{pmatrix}$ , c'est bien celle de la rotation  $\rho$  d'angle de mesure  $2\theta$ .
3. Il faut que  $\rho$  soit d'ordre fini, donc que pour un certain entier  $k$ ,  $\rho^k = Id$ , donc  $2k\theta = 2n\pi$ ; on écrit  $n/k$  sous forme irréductible:  $n/k = p/m$ , d'où le résultat. Réciproquement, puisque  $p$  et  $m$  sont premiers entre eux, l'ordre de  $\rho$  est exactement  $m$ ; les éléments  $e, \rho, \dots, \rho^{m-1}$  sont donc distincts, et forment le groupe engendré par  $\rho$ .
4. De  $s_2 s_1 = \rho$  on tire  $s_2 = \rho s_1$ ; pour  $k \in \{0, \dots, m-1\}$ ,  $s_1 \rho^k$  est une isométrie indirecte, donc une involution, d'où  $s_1 \rho^k s_1 \rho^k = Id = \rho^m$ , et la formule attendue.
5. On a vu que les éléments  $e, \rho, \dots, \rho^{m-1}$  sont donc distincts, c'est donc aussi le cas de  $e s_1, \rho s_1, \dots, \rho^{m-1} s_1$ ; les  $m$  premiers sont des isométries directes et les  $m$  derniers des isométries indirectes, finalement la liste proposée contient bien  $2m$  éléments distincts. De plus,  $G'$  contient le neutre, est stable par inverse (on a déjà dit que les  $m$  derniers sont des involutions), et par produit, en vertu notamment de la deuxième formule de 4 (on contrôle les produits de type  $\rho^k \rho^h$ ,  $\rho^k \rho^p s_1$ ,  $\rho^p s_1 \rho^k = \rho^p (\rho^{m-k} s_1)$ , enfin  $\rho^p s_1 \rho^k s_1 = \rho^p \rho^{m-k}$ ). C'est donc le sous-groupe engendré par  $\rho$  et  $s_1$ . Or  $G$  est aussi bien le groupe engendré par  $\rho$  et  $s_1$  (puisque  $s_2 = \rho s_1$ ), donc  $G = G'$ .
6. Les  $m$  réflexions de  $G$  sont les derniers éléments.  
On prend le cas où  $m = 6$ , et donc  $p = 1, 5, 7$  ou  $11$ . En fait 1 et 7 donnent la même droite  $D_1$ , de même que 5 et 11. Pour  $p = 1$ , les six axes trouvés sont successivement les droites dont un vecteur directeur fait l'angle  $\pi/6, 2\pi/6, \dots, 6\pi/6$  avec  $e_1$ . Par symétrie, dans les cas  $p = 11$ , on trouve les angles opposés, mais cela revient aux mêmes droites.

## 3 Familles obtusangles et acutangles

1. (a) On a  $(v|v) = \sum_i \sum_j \lambda_i \mu_j (r_i | r_j) \leq 0$ , ce produit scalaire est aussi positif donc il est nul et  $v = 0$ .

- (b) Par exemple, un  $\lambda_i$  est  $> 0$ ; alors  $0 = (v|t) = \sum_i \lambda_i (r_i|t) > 0$ , absurde.
2. (a) Par symétrie du produit scalaire,  $M$  est symétrique. L'unique coefficient de  ${}^tXMX$  est  $\sum_i \sum_j x_i (e_i|e_j) x_j = (\sum_i x_i e_i | \sum_j x_j e_j) = \|\sum_i x_i e_i\|^2$ , c'est positif, et n'est nul que si  $X = 0$  puisque  $(e_1, \dots, e_n)$  est une base. C'est dire que la forme quadratique  $X \mapsto {}^tXMX$  est définie positive, ou encore que  $M$  l'est.
- (b) Si  $n=1$ , l'unique valeur propre de  $M$  est 1...  
Les valeurs propres de  $M$  sont strictement positives puisque  $M$  est définie positive, leur somme est la trace de  $M$  qui vaut  $n$  (vecteurs unitaires), donc elles sont toutes strictement moindres que  $n$ .
3. (a) On peut choisir une solution qui anticipe sur la suite: cherchons les  $f_i$  sous la forme:  $f_i = \sum_j a_{ij} e_j$ ; soit  $A = (a_{ij})$  la matrice d'ordre  $n$  des coefficients cherchés. La condition est  $\forall k, h, (e_k|f_h) = \delta_{k,h}$ , donc  $\forall k, h, \sum_j a_{hj} (e_j|e_k) = \delta_{h,k}$ , soit  $AM = I_n$ . L'unique solution est  $A = M^{-1}$ . Donnés dans une base par les coefficients d'une matrice inversible, les  $f_i$  forment bien une base.
- (b) On a alors  $(f_i|f_k) = (\sum_j a_{ij} e_j | \sum_p a_{kp} e_p) = \sum_{j,p} a_{ij} a_{kp} (e_j|e_p) = \sum_p (\sum_j a_{ij} (e_j|e_p)) a_{kp} = \sum_p (\delta_{i,p}) a_{kp} = a_{ki}$ , ce qui revient bien à dire, puisque  $f_i = \sum_j a_{ij} e_j$ , que  $f_i = \sum_j (f_i|f_j) e_j$ .
- (c) On a déjà établi ce résultat.
4. (a) D'après le cours, tout espace propre pour  $M$ , pour la valeur propre  $\lambda$ , l'est pour  $A$ , pour la valeur propre  $1 - \lambda/n$ ;  $A$  est donc diagonalisable (d'ailleurs, elle est elle aussi symétrique réelle...), et ses valeurs propres sont dans l'image de  $]0, n[$  par  $\lambda \mapsto 1 - \lambda/n$ , donc dans  $]0, 1[$ .
- (b) Puisque  $A$  est symétrique positive, sa norme subordonnée à la norme euclidienne est le sup de ses valeurs propres, donc est  $< 1$ . On sait alors que  $(I - A)^{-1} = \sum_{p=0}^{+\infty} A^p$ . Or, par construction, tout coefficient de  $A$  est positif (c'est un  $\delta_{ij} - (e_i|e_j)/n$ ), il en est donc de même pour toutes ses puissances, donc chaque coefficient de  $(I - A)^{-1}$ , donné comme une somme de série à termes positifs, est positif.
- (c) Or  $(I - A)^{-1} = ((1/n)M)^{-1} = nM^{-1}$ , donc  $N$  (notations de 3.(c)) a tous ses coefficients positifs.

## 4 Systèmes de racines

1. L'ensemble  $\Delta$  est constitué des douze vecteurs dont les affixes sont les racines douzièmes de l'unité.
2. Soit  $u \in \Delta$ ; soit  $s$  d'hyperplan  $H$  orthogonal à  $u$ ; pour  $g \in G$ , par stabilité du groupe  $G$ ,  $gs g^{-1} \in G$ , c'est la réflexion d'hyperplan  $g(\mathbb{R}u^\perp) = g(\mathbb{R}u)^\perp$ , donc  $g(u) \in \Delta$  par définition.



3. La réunion des orthogonaux des éléments de  $\Delta$  est une union finie d'hyperplans, donc n'est pas tout, on peut choisir un  $t$  en dehors.
4. Soit  $F$  l'ensemble des sous-ensembles  $B$  de  $\Delta^+$  tels que tout élément de  $\Delta^+$  est  $B$ -positif; cet ensemble est non vide car il contient  $\Delta^+$  (tout élément  $r$  s'écrit  $r = 1.r$ ); l'ensemble des cardinaux des éléments de  $F$  a donc un plus petit élément, l'élément de  $F$  en question est de cardinal minimal.
5. Par symétrie, il suffit de montrer qu'il n'est pas  $B$ -positif. S'il l'est, soit  $\lambda_i r_i - \lambda_j r_j = \sum_k a_k r_k$  (les  $a_k$  sont  $\geq 0$ ), donc  $\lambda_i r_i = \sum_k b_k r_k$  (les  $b_k \geq 0$ ,  $b_j > 0$ ), puis  $r_i = \sum_k c_k r_k$  (les  $c_k \geq 0$ ,  $c_j > 0$ ). Si on avait  $c_i = 1$ , en faisant le produit scalaire avec  $t$ ,  $0 = \sum_{k \neq i} c_k (r_k | t) > 0$ , absurde. Donc  $c_i \neq 1$ , et on tire  $r_i = \sum_{k \neq i} d_k r_k$ , où tous les  $d_k$  sont de même signe (celui de  $1 - c_i$ ). Ce signe n'est pas le signe plus, sinon le système  $B$  n'est pas minimal (on peut exprimer tous les éléments de  $\Delta^+$  sans utiliser  $r_i$ ). Ce n'est pas le signe moins, sinon, en faisant le produit scalaire avec  $t$ , on a une contradiction. Finalement l'hypothèse initiale est rejetée.
6. On a  $s_i(r_j) = 1.r_j - 2 \frac{(r_i | r_i)}{(r_i | r_i)} r_i$ ; ce vecteur est dans  $\Delta$ ; il est donc  $B$ -positif ou  $B$ -négatif, donc le coefficient de  $r_i$  ne peut être  $> 0$ , donc  $(r_i | r_j) \leq 0$ , et alors on voit que  $s_i(r_j)$  est  $B$ -positif. Le système est donc obtusangle, et comme tous ses vecteurs sont dans un demi-plan strict (par choix de  $\Delta^+$ ), il est libre (3.1.).
7. Il y a alors unicité d'une écriture  $r = \sum_i \mu_i r_i$ , et donc le signe de ces  $\mu_i$  bien déterminés dit si  $r$  est  $B$ -positif ou  $B$ -négatif; s'il y a un  $\mu_i > 0$ , tous les  $\mu_j$  sont  $> 0$  et  $r \in \Delta^+$ .
8. Soit  $r = \sum_j a_j r_j$  ( $a_j \geq 0$ ). Alors  $\Delta$  contient  $s_i(r)$  qui vaut  $a_i s_i(r_i) + \sum_{j \neq i} a_j s_i(r_j)$ ; on peut réécrire cela  $\sum_{j \neq i} b_j r_j + b r_i$ , avec des  $b_j \geq 0$  et le signe de  $b$  inconnu. Si tous les  $b_j$  sont nuls,  $s_i(r) = b r_i$ , puis  $r = -b r_i$  et (les vecteurs sont unitaires dans le même demi-plan strict)  $r = r_i$ . Sinon, un au moins de  $b_j$  est  $> 0$ , donc, par 7.,  $s_i(r) \in \Delta^+$ .
9. (a) Si tous les  $(r | r_i)$  sont  $\leq 0$ , écrivons  $r = \sum_i \lambda_i r_i$ ,  $\lambda_i \geq 0$ ; alors  $(r | r) = \sum_i \lambda_i (r_i | r) \leq 0$ , donc  $r = 0$ , absurde car  $r$  est unitaire.  
 (b) Puisque  $r \notin B$ ,  $u_1 \in \Delta^+$  (par 8.). Et  $(u_1 | t) = (r | t) - 2 \frac{(r | r_i)}{(r_i | r_i)} (r_i | t) < (r | t)$ . La liste des  $(v | t)$ ,  $v \in \Delta^+$ , est finie, donc vient un moment où pour la première fois,  $u_k \in B$ .  
 (c) Si on note  $s_1, \dots, s_{k-1}$  les symétries successivement introduites, et  $g$  la composée  $g = s_{k-1} \circ \dots \circ s_1$ , on a  $g(r) = u_k \in B$ , et  $g \in G_0$ .
10. Soit  $h$  une réflexion de  $G$ , et  $r$ , qu'on peut supposer dans  $\Delta^+$  quitte à le changer en son opposé, tel que  $r$  est orthogonal à l'hyperplan de  $g$ . Prenons comme au 9.  $g \in G_0$ , tel que  $g(r) \in B$ ; alors  $ghg^{-1}$  est une réflexion dont l'orthogonal de l'hyperplan contient  $g(r)$ , donc c'est un élément de  $G_0$ ; par stabilité,  $h$  est aussi dans  $G_0$ . Alors,  $G_0$  contient toute les réflexions

de  $G$ , qui en constituent un système générateur, donc  $G_0$  contient  $G$ , et finalement l'égalité.

Dans l'exemple, on peut choisir les vecteurs d'affixe  $\exp(i\pi/6)$  et  $-1$ : si  $s_1$  et  $s_3$  sont les réflexions associées, on a  $s_1 s_3 = \rho$ , donc elles constituent un système de générateurs. L'énoncé ne demande pas clairement de prouver qu'on tient un système fondamental: en choisissant  $t$  d'affixe  $\exp(i(\pi/2 + \pi/12))$ ,  $\Delta^+$  est constitué des vecteurs d'affixes les  $\exp(ik\pi/6)$ ,  $k = 1 \dots 6$ . Les deux choisis (qui sont "les plus à l'extérieur") constituent bien un système fondamental.

## 5 Dimension trois

1. Une réflexion engendre un groupe à deux éléments.

Soient deux réflexions  $s, t$ . Soient  $u, v$  resp. orthogonaux à leurs plans. On choisit  $w$  orthogonal à  $u$  et  $v$ . Alors  $s$  et  $t$  induisent dans le plan  $H = (Ru)^\perp$ , qu'on peut orienter par  $u$ , deux réflexions  $S$  et  $T$  distinctes (sinon, comme  $s(u) = t(u) = u$ , on aurait  $s = t$ ). Tous les éléments du groupe  $G$  engendré par  $s$  et  $t$  fixent  $u$ , et induisent dans  $H$  un élément du groupe engendré par  $S$  et  $T$ . Ce groupe a été décrit à la partie 2. Le groupe cherché lui est isomorphe, les homologues des rotations du plan  $H$  sont des rotations d'axe  $Ru$ , les homologues des réflexions par rapport à des droites  $D$  de  $H$  sont des réflexions de plan  $D + Ru$ .

2. Remarque: l'énoncé omet de demander l'indépendance des  $r_i$ ; elle est pourtant nécessaire pour assurer qu'aucun produit scalaire ne vaut  $-1$ , et que l'inégalité entre  $\alpha + \beta + \gamma$  et  $2\pi$  est bien stricte. Cette indépendance sera assurée pour les questions suivantes, puisque les  $r_i$  formeront un système fondamental (famille dans un demi-plan strict).

On peut faire une preuve de pur calcul. La matrice des produits scalaires

des trois vecteurs est  $\begin{pmatrix} 1 & \cos \alpha & \cos \gamma \\ \cos \alpha & 1 & \cos \beta \\ \cos \gamma & \cos \beta & 1 \end{pmatrix}$ . Son déterminant est strictement

positif d'après 3.2.(a) (matrice définie-positive). Or le déterminant se calcule classiquement: après les opérations  $C_2 := C_2 - \cos \alpha C_1$ ,  $C_3 := C_3 - \cos \gamma C_1$ , on trouve  $\sin^2 \alpha \sin^2 \gamma - (\cos \beta - \cos \alpha \cos \gamma)^2 = (\cos(\alpha - \gamma) - \cos \beta)(\cos \beta - \cos(\alpha + \gamma))$ , enfin c'est  $4 \sin u \sin v \sin w \sin t$ , avec  $2u = -\alpha + \beta + \gamma$ ,  $2v = \alpha - \beta + \gamma$ ,  $2w = \alpha + \beta - \gamma$ ,  $2t = \alpha + \beta + \gamma$ .

L'intervalle  $[\pi/2, \pi]$  où vivent  $\alpha, \beta, \gamma$  place  $u, v, w$  dans  $]0, 3\pi/4$ , donc les trois premiers sinus sont  $> 0$ . Ainsi,  $\sin t > 0$ , avec  $t \in [3\pi/4, 3\pi/2]$ . Donc  $t < \pi$ , c'est le résultat voulu.

Preuve par projection sur un plan. Soit  $H$  le plan engendré par  $r_1$  et  $r_2$ ; soit  $p$  le projecteur orthogonal sur  $H$ . Alors  $(p(r_3)|r_2) = (r_3|p(r_2)) = (r_3|r_2) = \cos \beta = \cos \beta_1 \|r_2\| \|p(r_3)\|$ , si  $\beta_1$  est l'écart angulaire entre  $p(r_3)$  et  $r_2$ . Comme  $r_3$  n'est pas dans le plan  $H$ , on a  $\|p(r_3)\| < \|r_3\|$ , donc  $\cos \beta_1 < \cos \beta$ , puis  $\beta_1 > \beta$ . De même, avec  $\gamma_1$  l'écart angulaire entre  $p(r_3)$

et  $r_1$ , on a  $\gamma_1 > \gamma$ . Or,  $\alpha + \beta_1 + \gamma_1 = 2\pi$ , on en tire l'inégalité voulue.

3. On note qu'on n'a jamais obtenu d'unicité pour justifier l'article défini devant système fondamental...

(Preuve qui mérite d'être affirmée, sans doute). Soit  $s_i$  la réflexion de plan orthogonal à  $r_i$ . Soit  $K$  le groupe engendré par  $s_1$  et  $s_2$ . C'est un groupe de Coxeter. Comme on l'a vu au 1., son action se voit dans le plan  $P$  engendré par  $r_1$  et  $r_2$ . Soit une réflexion de ce groupe. Elle a une racine  $r$  dans le plan, et par ailleurs combinaison positive des  $r_i$ . Donc le coefficient relatif à  $r_3$  est nul. Ainsi,  $r_1, r_2$  est un système fondamental pour  $K$  (quand on a deux vecteurs, on peut trouver un demi-plan qui les contient). On est dans la situation de la partie 2. Les  $m$  racines des axes de réflexions planes sont connues. Pour être un système fondamental, comme sur l'exemple de la fin de la partie 4., les vecteurs doivent être aussi écartés que possible (sinon on trouverait une racine qui ne peut s'obtenir comme combinaison positive), c'est-à-dire que leur écart angulaire est  $\pi - \pi/m$ . En notant  $a = m$ , on a  $\alpha = \pi - \pi/m$  et  $(r_1|r_2) = -\cos(\pi/a)$  (avec  $a \geq 2$  entier). On raisonne de même pour les autres.

De quelque façon que le résultat ci-dessus ait été établi, on a  $\pi/a \in ]0, \pi/2]$ ,  $\pi - \pi/a \in [\pi/2, \pi[$ ,  $\alpha \in [\pi/2, \pi[$ , ces derniers nombres ont même cos (c'est  $(r_1|r_2)$ ), donc  $\alpha = \pi - \pi/a$ . De même, pour  $\beta$  et  $\gamma$ . L'inégalité stricte du 3. devient  $3\pi - \pi(1/a + 1/b + 1/c) < 2\pi$ , d'où l'inégalité voulue.

4. Choisissons les notations de sorte que  $a \leq b \leq c$ . Avec  $a = 2, b = 2$ , tout  $c \geq 2$  convient. Avec  $a = 2$  et  $b = 3$ , il faut  $3 \leq c < 6$ , ce qui laisse les valeurs 3, 4, 5. Si  $b \geq 4$ , il vient  $c < 4$ , exclu. Si  $a \geq 3$  donc  $b \geq 3$ , on a  $c < 3$ , également exclu: toutes les possibilités ont été vues, et fournissent la liste proposée.

5. On prend  $r_1 = e_1, r_2 = e_2, r_3 = -\cos(\pi/c)e_1 + \sin(\pi/c)e_3$ . On a ainsi trois vecteurs unitaires,  $(r_1|r_2) = 0 = -\cos(\pi/2)$ ,  $(r_2|r_3) = 0 = -\cos(\pi/2)$ ,  $(r_3|r_1) = -\cos(\pi/c) \leq 0$ , la famille est obtusangle, et dans un même demi-espace strict: on cherche par exemple  $t$  donné par  $t = pe_1 + qe_2 + re_3$ , les conditions sont  $p > 0, q > 0, -p\cos(\pi/c) + r\sin(\pi/c) > 0$ , par exemple  $p = q = 1, r = \cotan(\pi/c) + 1$ .

Dans le second cas, on choisit  $r_1 = e_1, r_2 = e_2, r_3 = -(1/2)e_1 - (1/2)e_2 + \sqrt{2}/2e_3$ , les produits scalaires sont successivement 0,  $-1/2, -1/2$  comme attendu, les vecteurs sont unitaires, le vecteur  $t = e_1 + e_2 + 2e_3$  convient. On peut examiner les cas restants. D'abord  $r_1 = e_1, r_2 = e_2, r_3 = -(1/\sqrt{2})e_1 - (1/2)e_2 + 1/2e_3, t = e_1 + e_2 + 2e_3$  convient.

Enfin,  $r_1 = e_1, r_2 = e_2, r_3 = -\cos(\pi/5)e_1 - (1/2)e_2 + he_3$ , on calcule  $h = \sin^2 \pi/5 - 1/4$  pour avoir un vecteur unitaire,  $t = e_1 + e_2 + q, q$  assez grand, convient.

En réalité, on trouve des triplets vérifiant les conditions nécessaires mises en évidence dans cette partie, mais rien n'a prouvé qu'ils constituent en effet un système fondamental pour le groupe de Coxeter qui leur correspond!...